Tatiana Roque

História da matemática

Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas

ZAHAR

Tatiana Roque

História da matemática

Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas

ZAHAR

Para Matias

Sumário

“O contato e o hábito de Tlön desintegraram este mundo. Encantada com seu rigor, a humanidade esquece e torna a esquecer que é um rigor de enxadristas, não de anjos. Já penetrou nas escolas o (conjetural) ‘idioma primitivo’ de Tlön; o estudo de sua história harmoniosa (e cheia de episódios comoventes) já obliterou a que presidiu minha infância; nas memórias um passado fictício já ocupa o lugar de outro, do qual nada sabemos com certeza − nem mesmo que é falso. Foram reformadas a numismática, a farmacologia e a arqueologia. Entendo que a biologia e a matemática aguardam também seu avatar.”

(“Tlön, Uqbar e Orbis Tertius”, *Ficções*, Jorge Luis Borges)

Prefácio

Este é o primeiro livro de história geral da matemática propriamente brasileiro e resultado de pesquisa original. Até o momento, as publicações em uso no Brasil sobre o tema têm sido traduções de obras lançadas nos Estados Unidos, em geral reedições de títulos de décadas atrás que seguem padrões atualmente considerados ultrapassados pela historiografia.

Resultado de pesquisas e experiências em sala de aula realizadas por Tatiana Roque, este *História da matemática* já exprime bem o seu objetivo no subtítulo: *Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Isso significa distanciar-se do enfoque historiográfico tradicional, que se restringe à exposição das ideias dos matemáticos célebres como se elas levassem diretamente à matemática de hoje. Enfoque que se caracteriza ainda por uma descontextualização que por vezes se faz acompanhar de anedotas de caráter duvidoso, como uma tentativa de dizer que os gênios da matemática podem até agir como pessoas mortais.

A partir das reflexões e dos progressos permitidos pela metodologia de pesquisa na área desenvolvida nas últimas décadas, este livro apresenta uma história da matemática profundamente contextualizada nas *práticas* que caracterizam o fazer matemático. Focalizando nessa nova abordagem, parte de tais práticas para revelar o significado dos conceitos matemáticos apresentados e consegue desconstruir diversos mitos e lendas tradicionalmente divulgados pela historiografia.

Nessa empreitada, abrange os períodos-chave do desenvolvimento da matemática, desde a Mesopotâmia e o antigo Egito, a Antiguidade clássica, a Idade Média, com as contribuições dos árabes, e a Revolução Científica até o estabelecimento do rigor nas matemáticas nos séculos XVII e XVIII e na matemática pura no século XIX.

Além do próprio objetivo de reescrever a história tradicional da matemática, este estudo distingue-se como convite para uma leitura enriquecedora devido ao estilo vivo adotado pela autora, que explica o tema proposto em cada capítulo de modo agradável e inteligível, sem trivializá-los nem torná-los mais complexos do que são. Explicações cuidadosamente elaboradas e sustentadas em exemplos facilitam o entendimento. Há de servir como valioso recurso didático para professores e estudantes do ensino médio, em particular, atingindo também um público mais amplo.

Gert Schubring

Gert Schubring, doutor em matemática com livre-docência em história da matemática, é pesquisador no Institut für Didaktik der Mathematik, Universidade de Bielefeld, Alemanha. Autor de vários livros, entre os quais *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany* (Springer, 2005), é editor-chefe da revista *International Journal for the History of Mathematics Education* e membro do Advisory Board of the International Study Group for the Relations between Pedagogy and History of Mathematics.

Apresentação

ESTE LIVRO SE DIRIGE aos leitores que desejam conhecer um pouco mais a história da matemática, mas também a todos aqueles que têm, ou já tiveram, vontade de aprender matemática. Muitas vezes, o contato com seus conceitos e ferramentas torna-se difícil, pois a imagem que se tem dessa disciplina é marcada por seu caráter mecânico, abstrato e formal, o que produz uma sensação de distância na maioria das pessoas. Um de nossos principais objetivos aqui é mostrar que o modo tradicional de contar a história da matemática ajudou a construir esta visão: a de que a matemática seria um saber unificado envolvendo quantidades, números ou grandezas geométricas.

Quase todos os livros disponíveis em português que narram sua história seguem uma abordagem retrospectiva, que parte dos conceitos tais como os conhecemos hoje para investigar sua origem. Assim, surgem afirmações como “o primeiro a descobrir esta fórmula foi o matemático X”; ou “este resultado *já* estava presente na obra de Y, ou na época de Z”. Esse tipo de informação, além de ter pouca relevância, oferece uma imagem deturpada da matemática, como se ela fosse uma ciência de conceitos prontos, dados *a priori*, que os povos antigos “ainda” não tinham descoberto ou não tinham possibilidade de conhecer. Seus resultados e ferramentas possuiriam, assim, antecedentes e precursores, personagens visionários, capazes de vislumbrar ideias que só seriam entendidas de modo preciso muito depois de seu tempo.

Pode-se fazer história da matemática, essencialmente, por duas razões: para mostrar como ela se tornou o que é; ou para indicar que ela não é apenas o que nos fazem crer que é. No primeiro caso, deseja-se contar como foi construído o que se acredita ser o edifício ordenado e rigoroso que hoje chamamos de “matemática”. No segundo, ao contrário, pretende-se exibir um conjunto de práticas, muitas vezes desordenadas, que, apesar de distintas das atuais, também podem ser ditas “matemáticas”. Quando encarado como uma prática múltipla e diversa, esse conhecimento se apresenta composto por ferramentas, técnicas e resultados desenvolvidos por pessoas em momentos e contextos específicos, com suas próprias razões para *fazer matemática* e com ideias singulares sobre o que isso significa.

Neste livro analisamos, de um modo novo, alguns temas tratados pela história da matemática tradicional que, embora tenham ajudado a compor a visão dominante sobre essa disciplina, são questionados pelos historiadores atuais. Listamos e criticamos, a seguir, três aspectos-chave dessa visão tradicional, indicando como foram criados ou ratificados, ainda que de modo fragmentado e inconsciente, pelos relatos históricos usuais:

A matemática é um saber operacional, de tipo algébrico, e tem como um de seus principais objetivos a aplicação de fórmulas prontas a problemas (muitas vezes enumerados como uma lista de problemas parecidos).

Desde tempos muito antigos, povos como os babilônicos *já* saberiam resolver equações de segundo grau. Em seguida, cada época teria acrescentado uma pequena contribuição, até que, por volta do século XVI, a álgebra começaria a se desenvolver na Europa, tendo adquirido os contornos definitivos da disciplina que chamamos por este nome.

A matemática é uma disciplina formal e abstrata, por natureza, que ajuda a desenvolver o raciocínio, mas é destinada a poucos gênios, a quem agradecemos por nos terem legado um saber unificado e rigoroso.
A sistematização da matemática em teoremas e demonstrações teria se iniciado na Grécia antiga. Desde então, destaca-se a importância do método lógico-dedutivo, que seria desconhecido de outros povos antigos e relegado a segundo plano por pensadores medievais e mesmo renascentistas. Esse ideal teria sido retomado, ainda que de modo insuficiente, nos séculos XVII e XVIII, porém, recolocado no centro da atividade matemática a partir do século XIX. Só então, com a explicitação de seus fundamentos, o edifício matemático teria adquirido uma consistência interna.

Ainda que possua aplicações a problemas concretos, a matemática é um saber eminentemente teórico. Parte-se, algumas vezes, de dados da experiência, mas para elaborar enunciados que os purifiquem e traduzam sua essência.
Em contraposição aos tempos áureos da Grécia, o saber teórico teria começado a decair desde a Antiguidade tardia, atingindo seu nível mais baixo na Idade Média, quando a matemática teria sido exercida somente para fins práticos. Seu caráter teórico voltaria a ser valorizado com o Renascimento e, apesar de alguns percalços, teria triunfado em diferentes épocas, segundo uma narrativa que destaca seu antagonismo em relação ao conhecimento prático.

Nosso objetivo não é discutir até que ponto são falsos ou verdadeiros os três aspectos que acabamos de listar e que moldam a imagem corrente da matemática. Pretendemos mostrar, todavia, que os relatos históricos que contribuíram para a constituição dessa imagem são bastante aproximativos e devem ser discutidos com base em novas pesquisas e em um modo mais atual de fazer história.

Abordaremos, portanto, épocas, personagens e localidades já tratados pela narrativa tradicional. Mas não para reproduzi-la, e sim para mostrar o que se pode dizer hoje que permita desconstruir essa narrativa e começar a construir uma nova. Muitos relatos que caíram no senso comum, reproduzindo anedotas sobre a vida dos matemáticos, além de mitos e lendas, vêm sendo desmentidos, desconstruídos ou problematizados por diversos historiadores nas últimas décadas. Basta um exemplo, tomado da matemática grega: o "horror" que os gregos supostamente teriam pelo infinito, demonstrado pelo escândalo que a descoberta dos números irracionais teria gerado no seio dos pitagóricos, levando um de seus integrantes a ser perseguido e assassinado. Um livro popular no Brasil, *Introdução à história da matemática*, de Howard Eves, endossa a lenda: "A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ provocou alguma consternação nos meios pitagóricos ….

Tão grande foi o 'escândalo lógico' que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo."[1] Tal mito, apesar de desmentido, ainda é amplamente reproduzido, entre outras razões, pela escassez de bibliografia no Brasil que leve em conta os trabalhos recentes sobre história da matemática grega,[2] que analisam de perto o pensamento dos pitagóricos e sua suposta relação com matemática.

Nossa proposta é, justamente, desfazer clichês desse tipo. Para tanto, escolhemos momentos de evidente mitificação relativa a certas áreas ou conceitos e os exibimos de modo cronológico. A ideia não é reconstruir uma visão global, sintética, do desenvolvimento da matemática, vista como um saber unitário composto pela acumulação de resultados que iriam se encaixando para constituir uma arquitetura ordenada e sistemática. Ou seja, nosso objetivo principal é, partindo dos modos como a história da matemática foi escrita, recontar essa história. Por isso cada capítulo deste livro se inicia com a apresentação de um *Relato Tradicional* que reproduz a visão convencional sobre tal período ou tal conceito, sendo seguido de uma contextualização mais ampla que leve em conta fatores culturais ou filosóficos. Investigar o contexto não significa, porém, traçar um panorama histórico de caráter geral que funcionaria como um pano de fundo para o desenvolvimento da matemática.[3] Ao contrário, na medida do possível, serão explicitadas aqui as relações intrínsecas entre as práticas matemáticas e seu contexto.

Alguns capítulos abordam conceitos matemáticos conhecidos, como os números na Mesopotâmia, a geometria na Grécia, a álgebra na Idade Média e no Renascimento. Em particular, quando se fala em "álgebra" hoje tem-se em mente uma subdisciplina da matemática que lida com equações e símbolos. Mas essa não era a maneira como os árabes, por exemplo, tratavam problemas que podem ser, atualmente, escritos em forma de equação. Como eles enunciavam seus métodos? Em que ambiente eles se inseriam? Que visão tinham sobre a própria prática matemática? Perguntas desse tipo nos guiarão, situando as realizações dos atores em sua cultura.

Tal abordagem evidencia a dificuldade de se falar em "evolução" de um conceito, como o de número, ou de um domínio, como a álgebra, pois isso implica percorrer diferentes momentos nos quais essas noções mudaram de sentido. Logo, convém nos livrarmos de classificações muito arraigadas em nossa cultura, caso da divisão da matemática em subdisciplinas como álgebra, geometria etc. Esses nomes designam práticas distintas ao longo da história.

Estudar a matemática do passado apenas com a matemática de hoje em mente é uma postura que os historiadores atuais têm tido o cuidado de evitar. Para vencer os anacronismos, deve-se tentar mergulhar nos problemas que caracterizavam o pensamento de certa época em toda a sua complexidade, considerando os fatores científicos, mas também culturais, sociais e filosóficos. Só assim será possível vislumbrar os problemas e, portanto, o ambiente em que se definiram objetos, se inventaram métodos e se estabeleceram resultados.

Desejamos contribuir para transformar o modo transcendente de se abordar a matemática, o que pode ser útil não apenas para professores, mas para qualquer um que se interesse pelo assunto. Procuramos expor os conteúdos do modo mais claro possível, e o conhecimento de matemática que se requer para acompanhar a exposição é, em sua maior parte, o correspondente à grade curricular do ensino básico. Os capítulos podem ser lidos de duas maneiras: examinando-se com atenção cada desenvolvimento matemático, de modo linear; ou concentrando-se nas análises históricas – nesse caso, as explicações matemáticas seriam deixadas para uma eventual segunda leitura.

Convém observar que este livro se dedica muito pouco à matemática recente. Interrompemos nossa análise no final do século XIX, com as discussões sobre os fundamentos da matemática e a consistência de seus conceitos básicos, como os de número e de função. A prioridade será dada à investigação da história das ideias elementares, ainda que seja necessário, algumas vezes, analisar outros aspectos da matemática que explicam a maneira como esses conceitos são definidos hoje.

Apostamos na possibilidade de que um novo olhar ajude a fazer com que as pessoas não se sintam pertencentes a um mundo distante daquele que os matemáticos produziram. O intuito é tornar disponível, para os leitores brasileiros, uma parte das discussões sobre um novo modo de ver a matemática do passado, desfazendo a imagem romantizada e heroica que a envolve e que tem sido reproduzida pela mitificação de sua história. Talvez assim se possam romper certas barreiras psicológicas, tornando possível até mesmo que um público mais amplo venha a gostar mais dessa disciplina.

Introdução

A formação de um mito: matemática grega – nossa matemática[1]

De acordo com as narrativas convencionais, a matemática europeia, considerada a matemática *tout court*, originou-se com os gregos entre as épocas de Tales e de Euclides, foi preservada e traduzida pelos árabes no início da Idade Média e depois levada de volta para seu lugar de origem, a Europa, entre os séculos XIII e XV, quando chegou à Itália pelas mãos de fugitivos vindos de Constantinopla. Esse relato parte do princípio de que a matemática é um saber único, que teve nos mesopotâmicos e egípcios seus longínquos precursores, mas que se originou com os gregos. Ora, com base nas evidências, não é possível sequer estabelecer uma continuidade entre as matemáticas mesopotâmica e grega. Com raras exceções, a matemática mesopotâmica parece ter desaparecido por volta da mesma época dos primeiros registros da matemática grega que chegaram até nós, logo, não podemos relacionar essas duas tradições. Isso indica que talvez não possamos falar de evolução de uma única matemática ao longo da história, mas da presença de diferentes práticas que podemos chamar de “matemáticas” segundo critérios que também variam.

A partir do século XVI, a história foi escrita, muitas vezes, com o intuito de mostrar que os europeus são herdeiros de uma tradição já europeia, desde a Antiguidade. Nesse momento, construiu-se o mito da herança grega, que serviu também para responder a demandas identitárias dos europeus. Entender o como e o porquê de sua construção nos ajuda a compreender que o papel da história não é acessório na formação de uma imagem da matemática: sua função é também social e política.

O mito de que somos herdeiros dos gregos, reforçado por inúmeras histórias da matemática escritas até hoje, teve sua origem no Renascimento. Tal ideia já existia um pouco antes, no século XIV, no seio do movimento dos humanistas italianos, inspirado no enaltecimento do saber dos antigos. Petrarca, poeta italiano, um dos pais do movimento, escreveu biografias de Arquimedes, apesar de compreender muito pouco o conteúdo de seus trabalhos, a fim de incentivar a reverência aos heróis da Antiguidade. A matemática foi incorporada, então, como um elemento vital da cultura humanista.

Um humanista com vasto conhecimento matemático foi, por exemplo, Regiomontanus. Para ele, essa disciplina se dividia em dois ramos: a geometria e a aritmética. O principal nome relacionado à geometria era o de Euclides, mas Arquimedes e Apolônio também eram mencionados. No que tange à aritmética, o papel de Euclides era igualmente sublinhado como responsável por uma abordagem mais legítima que a de Pitágoras. Regiomontanus reconhecia que outros autores brilhantes escreveram sobre esses assuntos “em diversas línguas”, mas seus nomes não são citados por “falta de tempo”. Ele chega a lembrar a contribuição árabe para a álgebra, mas a precedência do grego Diofanto é rapidamente invocada. Em domínios mais práticos – como a astronomia, a música ou a perspectiva –, os trabalhos árabes eram reconhecidos, mas a matemática, segundo Regiomontanus, só teria sido cultivada de modo adequado pelos gregos e latinos.

O Humanismo era um movimento conectado com o desenvolvimento de uma cultura urbana. Logo, tratava de dar valor à utilidade do conhecimento para a vida comum, embora a legitimidade do saber estivesse associada a argumentos teóricos. Alguns escritos de meados do século XVI reconhecem a proximidade da álgebra com a cultura islâmica. Outros domínios, como a óptica e a astronomia, também eram praticados a partir de contribuições islâmicas, e ainda não era possível falar de matemática europeia, uma vez que, fora da Itália e de partes da Alemanha, salvo raras exceções, ela não estava desenvolvida. Portanto, não podemos localizar nesse momento a construção do mito sobre a origem greco-ocidental da matemática, e sim na segunda metade do século XVI, por razões que ultrapassam o trabalho matemático.

Em primeiro lugar, cabe lembrar que o século XVI é o período da expansão colonial, obviamente associada ao desejo de se construir uma identidade europeia, com características intelectuais que pudessem ser demarcadas dos "outros" povos com os quais os europeus estavam entrando em contato. Mas essa não é a única razão. Na segunda metade desse século, à depreciação colonialista do que não é europeu veio se somar a necessidade de controlar e domesticar as classes populares.

No início do século XVI, a cultura europeia não distinguia um saber de alto nível da cultura popular. As manifestações culturais eram híbridas, com influências recíprocas entre as diferentes classes sociais. A necessidade de demarcar um saber de alto nível teve início com as ameaças impostas pelo clima de revolta que se seguiu à Reforma protestante. O princípio de autoridade passou a ser questionado, tanto no âmbito religioso quanto no político e no social. Surgiram, então, alguns movimentos mais radicais, como o dos anabatistas, que pregavam a simplicidade da palavra de Deus. Eles afirmavam que todos os homens são iguais, pois o espírito de Deus está em todos e nem mesmo o batismo seria necessário para diferenciar os indivíduos. Negavam-se, assim, as pompas da Igreja, as cerimônias e as imagens sacras. A percepção de que os padres enriqueciam e a Igreja se construía a partir da exploração dos pobres tornava a época propícia a reações.

A uma fase inicial de tolerância seguiu-se a repressão, de cunho físico, mas também ideológico. A perseguição a grupos marginais, como os ciganos, faz parte desses esforços, bem como a evangelização jesuítica dos camponeses. Na segunda metade do século XVI, as diferenças sociais se intensificaram e era preciso reconquistar culturalmente as classes populares, que ameaçavam romper com o controle exercido pelas classes dominantes. Depois de um período de trocas entre cultura superior e popular, era preciso separar fortemente esses dois modos de pensamento.[2] Uma parte da população converteu-se, assim, em alta burguesia, ao passo que o artesanato foi relegado às classes trabalhadoras, sem autonomia cultural. Nesse contexto, era útil desabonar não somente a matemática estrangeira, mas ainda a usada em problemas práticos, tidos como um fim menor da ciência. Nessa época, tentou-se transformar a álgebra em um saber nos moldes gregos. Mas, após Descartes, com a união da álgebra à geometria, as consequências dessa mudança serão ainda mais fortes, culminando na constituição de uma matemática europeia. A partir daí, o mito, preparado pelos humanistas com outro objetivo, ficava convenientemente à disposição, tendo sido adotado praticamente até os dias de hoje.

A imagem da matemática como um saber superior, acessível a poucos, ainda é usada para distinguir as classes dominantes das subalternas, o saber teórico do prático.[a] Os europeus foram erigidos em herdeiros privilegiados dos milagres gregos e a ciência passou a ser vista como uma criação específica do mundo greco-ocidental. Essa reconstrução tem dois componentes: a exaltação do caráter teórico da matemática grega, cuja face perfeita é expressa pelo método axiomático empregado por Euclides; e a depreciação das matemáticas da Antiguidade tardia e da Idade Média, associadas a problemas menores, ligados a demandas da vida comum dos homens. Nos Capítulos 2 e 3 mostraremos que a matemática grega, porém, era muito diferente da nossa, mesmo em seu aspecto formal. E no Capítulo 4 veremos que a matemática da Idade Média, período considerado obscuro, era uma manifestação singular, dentro da qual a separação entre teoria e prática não se aplica sem a mutilação de suas características peculiares.

Em *Science Awakening* (Despertar da ciência) – livro sobre as matemáticas egípcia, babilônica e grega publicado nos anos 1950 mas que permanece servindo de referência em diversos textos históricos –, o matemático Bartel Leendert van der Waerden inclui um capítulo sobre a decadência da matemática grega. Essa fase teria começado depois de Apolônio, na virada do século III a.E.C.[b] para o século II a.E.C. e se estendido pelo império romano até o fim da Idade Média. Ao tentar explicar o porquê dessa decadência, o autor levanta a hipótese de que, por não verem utilidade na matemática pura, os romanos teriam relegado os matemáticos a segundo plano. Mas tal argumento não é suficiente, pois, embora a seus olhos, esse motivo explique a estagnação, não dá conta do "verdadeiro retrocesso" da matemática, evidenciado pelo fato de os árabes evitarem a erudição grega, almejando somente escrever obras de matemática prática.

O mito da ciência como um saber tipicamente greco-ocidental serve, nesse caso, para exaltar a matemática pura, com seu caráter teórico e formal, e para desmerecer os trabalhos da Idade Média, em particular os dos árabes. Depois de elogiar Newton, B.L. van der Waerden resume quase 2 mil anos de história em uma única frase: "Em suma, todos os desenvolvimentos que convergem no trabalho de Newton, os da matemática, da mecânica e da astronomia, começam na Grécia."[3] Vemos, assim, que a separação entre teoria e prática pode ser uma projeção, na história, das crenças modernas sobre o que é – e o que deve ser – matemática.

É claro que desconstruir a história, idealizada, sobre a origem grega de nossa matemática não se impõe somente como uma obrigação moral, movida pelo dever de substituir uma verdade por outra, mais "verdadeira" historicamente. A necessidade de desconstruir o mito nasce de incômodos mais profundos, como demonstra J. Høyrup, um dos principais historiadores da matemática da atualidade, ao investigar a especificidade da matemática islâmica:

> Em tempos mais serenos que os nossos, esses pontos podem parecer imateriais. Se a Europa quer descender da Grécia antiga, e ser sua herdeira por excelência, por que não deixá-la acreditar nisso? Nossos tempos, contudo, não são serenos. A particularidade "Greco-Ocidental" sempre serviu (e serve mais uma vez em diversos lugares) como uma justificativa moral para o comportamento efetivo do "Ocidente" em relação ao resto do mundo, caminhando junto com o antissemitismo, o imperialismo e a diplomacia das canhoneiras. … Não é inútil lembrar a observação de Sartre de que a "prática intelectual terrorista" de liquidar "na teoria" pode acabar, facilmente, exprimindo-se como uma liquidação física daqueles que não se encaixam na teoria.[4]

A maçã de Newton: as transformações na história da ciência

A lenda de que Newton descobriu a lei da gravidade quando uma maçã caiu em sua cabeça é bastante conhecida, e, apesar da evidente caricatura que representa, não é uma invenção recente. Traduz a visão de que a ciência é uma produção individual de gênios que, num rompante de iluminação, têm ideias inovadoras, difíceis de serem compreendidas pelos homens comuns. O historiador R. Martins mostrou as origens, os usos e abusos dessa lenda.[5]

FIGURA 1 “Descoberta da lei de gravidade por Isaac Newton”: caricatura feita por John Leech e publicada em meados do século XIX.

A história da ciência foi marcada por preconceitos semelhantes aos que moldaram a história da matemática, sobretudo no que concerne ao desprezo pela Idade Média. Esse período foi visto como uma época estacionária, a “idade das trevas”, marcada pelo dogmatismo religioso, pelo misticismo e pelo abandono do raciocínio físico. Não se trata de saber em que medida isso é verdade, mas os adjetivos escolhidos indicam que o Renascimento inventou o mito das trevas para se autodefinir, por contraste, como a “idade da razão”. Cada época acaba elaborando, sobre o passado, as histórias que se adaptam, de alguma forma, à visão que possui sobre si mesma. Em seguida, com a Revolução Científica, a ciência teria se desenvolvido até atingir seus mais altos patamares com a descrição newtoniana do Universo. A ideia de que houve uma Revolução Científica é questionada, hoje, justamente por pressupor uma concepção moderna de ciência, como mostraremos no Capítulo 5.

Durante o Segundo Congresso Internacional de História da Ciência, realizado em Londres em 1931, o físico russo Boris Hessen defendeu a tese de que as ideias científicas de Newton, a respeito da mecânica e da gravitação universal, decorreram das necessidades da sociedade mercantil inglesa. Logo, o conteúdo da ciência seria determinado por estruturas sociais e econômicas, e não pela genialidade de seus atores. O trabalho de Hessen foi bem-recebido na época, sobretudo pelos marxistas ingleses, mas não chegou a ter grande repercussão no modo de praticar história da ciência. Ainda nos anos 1930, Robert K. Merton, sociólogo americano, escreveu uma tese famosa sobre a relação entre a religião protestante e o advento da ciência experimental. Seu livro *Science, Technology and Society in 17th-Century England* (Ciência, tecnologia e sociedade na Inglaterra do século XVII) levantou questões que se tornaram cruciais para o surgimento da sociologia da ciência. Os dois exemplos não chegam a constituir, contudo, um movimento coordenado de reflexão sobre como fazer história da ciência. A iniciativa de Merton procurava, inclusive, se dissociar dos princípios materialistas defendidos por Hessen. Para sermos breves, a história da ciência começou a se desenvolver nessa época, mas somente a partir dos anos 1960 iniciaram-se as discussões sobre a identidade dessa disciplina, que ganharam um novo impulso com as questões suscitadas pelo livro *A estrutura das revoluções científicas*, de Thomas Kuhn, publicado em 1962.[6] Já estava claro, nessa ocasião, que havia opiniões divergentes sobre a relação entre ciência e sociedade, mas um debate inovador foi introduzido por Kuhn, questionando o pressuposto “continuísta”.[7] Ou seja: os desenvolvimentos científicos possuem uma continuidade ou são marcados por rupturas?

O mito da origem greco-ocidental da ciência reflete o modelo continuísta, como se os avanços científicos viessem completar lacunas existentes na concepção predominante da fase precedente.

Essa visão começou a ser criticada nos anos da Segunda Guerra Mundial, quando já se fazia uma distinção entre uma história dita "internalista", que descreve os avanços científicos a partir de necessidades internas, e outra "externalista", que se fortaleceu nesse momento enfatizando os aspectos sociais e culturais que motivam o desenvolvimento da ciência. No entanto, a ruptura definitiva com a tese continuísta veio com a ideia de que a ciência avança passando por múltiplas revoluções científicas, defendida por Kuhn.

Para justificar sua concepção de que a história de um domínio científico passa por diferentes mudanças de paradigmas, Kuhn se apoiou na evolução das ciências físicas, porém sua crítica logo se expandiu para a análise de outras áreas da ciência. Em busca do equilíbrio, com o fim de realizar uma análise não continuísta sem cair na armadilha de estudar períodos longos por meio de concepções descontinuístas, a história da ciência passou a se concentrar em análises mais locais, como estudos de casos, de personagens e de documentos, para só depois investigar suas relações com o contexto mais amplo. Uma consequência dessas transformações é que os pesquisadores puderam se livrar da busca de precursores. Tal busca é, por si só, artificial, pois quando um autor cria precursores de uma determinada ideia ele não só modifica nossa concepção sobre o passado, como também aponta uma direção que a história teria seguido, de modo evolutivo.

A partir dos anos 1970, a história da ciência inicia uma nova fase.[8] Percebe-se, cada vez mais, a ciência como configurada por dados culturais, vinculada a agentes específicos e práticas locais. Encerra-se, assim, o período das grandes narrativas históricas. O abandono do eurocentrismo e do continuísmo diminuiu o interesse pelas histórias que pretendiam abarcar imensos períodos de tempo e enormes regiões geográficas, como era o caso do clássico de René Taton, *Histoire générale des sciences* (História geral das ciências), obra em quatro volumes, com mais de 3 mil páginas, publicada entre 1957 e 1964.

Depois da metade do século XX, traumatizados por duas guerras mundiais, muitos pensadores começaram a questionar o papel da ciência, mostrando-se céticos em relação à crença, que parecia inabalável, no desenvolvimento técnico e científico como um elemento fundamental para o progresso e o bem-estar da humanidade. As teses de Kuhn, bem como a transformação dos propósitos da história da ciência, podem ser vistas como uma tentativa de reconquistar alguma credibilidade para a ciência. Os relatos históricos que tendem a enxergar uma evolução da ciência, a partir dos seus resultados, eram desqualificados como história "whig". Esse termo foi cunhado pelo historiador britânico Herbert Butterfield,[9] em sua análise da história política do Reino Unido, que, no século XVIII, assistiu à vitória dos whigs contra os tories, mais conservadores. O termo foi aplicado para caracterizar as histórias que celebravam o progresso, a partir do triunfo das instituições representativas e das liberdades constitucionais. Tais histórias eram criticadas por seu anacronismo, ou seja, por assumir uma continuidade na tradição inglesa, que teria culminado com a forma atual de governo parlamentar. Narrativas desse tipo costumam se concentrar nas semelhanças, mais do que nas diferenças, entre o passado e o presente, o que as leva a não dar a devida importância ao trabalho histórico sobre as fontes. Por este motivo, a alcunha de "whig" foi usada para além desse contexto, na história da ciência, com o fim de designar a história escrita pelos vencedores, ou seja, as tentativas de apresentar o presente como uma progressão inevitável que culmina com as formas contemporâneas de se fazer ciência. No campo da história da ciência, a "história whig" vem sendo intensamente questionada desde as reformulações dos anos 1960 e 70.

As abordagens mais "externalistas" se multiplicaram a partir da década de 1970, radicalizando-se em meados dos anos 1990. Nesse momento, diversos cientistas ligados às ciências naturais desencadearam um movimento público de contestação à história internalista da ciência e fundaram a sociologia da ciência, questionando até mesmo a objetividade dos objetos científicos. Obviamente, essa reformulação acabou por gerar certos exageros no sentido oposto. Atualmente foi alcançado um maior equilíbrio. Os pressupostos de objetividade continuam em franco declínio no meio dos historiadores da ciência e, cada vez mais, reconhece-se como relevante a investigação do que as pessoas pensavam que estava acontecendo, e de que modo suas percepções e narrativas sobre os fatos influenciaram ou foram influenciados pela realidade que viviam. De modo geral, a perspectiva histórica permite reconhecer que qualquer interpretação é provisória e pode tomar por objeto de reflexão os próprios atos interpretativos por meio dos quais as tradições se constituíram e os sentidos foram produzidos.

Tornou-se também importante diferenciar a história da historiografia, que é a produção dos historiadores. Diferente da história, que pode ser definida como o conjunto do acontecer humano, objeto de estudo dos historiadores, a historiografia é a escrita sobre esse acontecer, que pode incluir uma atividade crítica, procurando mostrar as bases epistemológicas e políticas sobre as quais os discursos históricos são construídos, exibindo suas pressuposições tácitas. Um dos principais objetivos deste livro é justamente incorporar algumas mudanças historiográficas recentes à história tradicional da matemática.

As transformações por que passou a história da ciência nas últimas décadas não foram sentidas do mesmo modo, nem com a mesma cronologia, na história da matemática. Os livros de história da matemática mais conhecidos no Brasil, como *História da matemática*, de Carl Boyer, e *Introdução à história da matemática*, de Howard Eves, apresentam uma visão ultrapassada, contendo relatos já questionados pela pesquisa na área. Quando, aqui, mencionarmos, sem maiores precisões, “história da matemática tradicional” ou “historiografia tradicional”, estaremos nos referindo a obras como essas. Propomos, no *Anexo: A história da matemática e sua própria história*, um panorama das transformações recentes no modo de praticar história da matemática.

História da matemática e ensino

O modo de escrever o encadeamento das definições, dos teoremas e das demonstrações é, desde muitos séculos, uma preocupação fundamental da matemática. No entanto, não podemos deixar de perceber uma diferença crucial entre a ordem lógica da exposição, o modo como um texto matemático é organizado para ser apresentado, e a ordem da invenção, que diz respeito ao modo como os resultados matemáticos se desenvolveram. O filósofo francês Léon Brunschvicg mencionava essa diferença e a necessidade de reverter a ordem da exposição, se quisermos compreender o sentido amplo das noções matemáticas.[10]

Ao analisar a estrutura das revoluções científicas, T. Kuhn sinalizou que os cientistas, em seu trabalho sistemático, estão continuamente reescrevendo (e escondendo) a história real do que os levou até ali.[11] Isso é natural, pois o objetivo desses pesquisadores é fazer a ciência avançar e não refletir sobre seus resultados. A diferença entre o modo de fazer e de escrever está também muito presente na matemática, que parece ser escrita de trás para a frente. As definições que precedem as conclusões sobre os objetos de que se está tratando explicitam, na verdade, os requisitos para que um enunciado seja verdadeiro, requisitos que foram descobertos por último, em geral, no trabalho efetivo do matemático. E esse encadeamento lógico na apresentação dos enunciados torna a matemática transcendente e desconectada de seu contexto de descoberta.

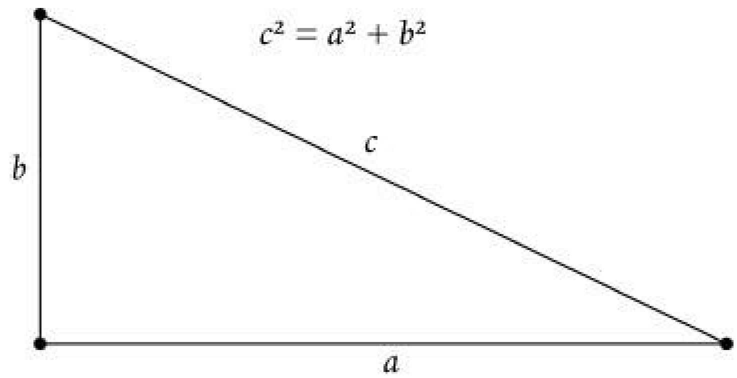
Um dos fatores que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, em vez de partirmos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas às quais ele responde, tomamos esse conceito como algo pronto. Vejamos como a ordem lógica sugere apresentar o teorema de Pitágoras.

Definição 1: Um triângulo é retângulo se contém um ângulo reto.

Definição 2: Em um triângulo retângulo o maior lado é chamado "hipotenusa" e os outros dois são chamados "catetos".

Teorema: Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Problema: Desenho um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 e pergunto o valor da hipotenusa.



Temos primeiro as definições, depois os teoremas e as demonstrações que usam essas definições e, finalmente, as aplicações dos teoremas a alguma situação particular, considerada um problema. A partir dessa apresentação, podemos demonstrar e aplicar o teorema de modo convincente. Ainda assim, diversas perguntas permanecem sem resposta, como: por que um triângulo retângulo merece uma definição especial? Por que esses nomes? O que é medir? Por que é interessante medir os lados de um triângulo? Por que devemos conhecer a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo? As respostas a essas perguntas permanecem escondidas por trás do modo coerente como enunciamos o teorema e, sobretudo, do modo como utilizamos operacionalmente o resultado que ele exprime.

A matemática que lemos nos livros já foi produzida há muito tempo e reorganizada inúmeras vezes. Entretanto, não se trata de um saber pronto e acabado. Fala-se muito, hoje, em inserir o ensino de um conceito matemático em um contexto. E justamente porque a maioria das pessoas acha que a matemática é muito abstrata, ouvem-se pedidos para que ela se torne mais "concreta", ligada ao "cotidiano". Mas a matemática também é vista como um saber abstrato por excelência. Como torná-la mais concreta? Essas questões aparecem frequentemente na experiência de ensinar matemática, bem como nas discussões sobre as dificuldades de seu ensino e de sua aprendizagem.

Costuma-se dizer que o aprendizado de matemática é importante porque ajuda a desenvolver a capacidade de raciocínio e, portanto, o pensamento lógico coerente, que é um tipo de pensamento abstrato. É verdade que a matemática lida com conceitos que não parecem corresponder à experiência sensível, caso dos números negativos, irracionais ou complexos. Mesmo os conceitos geométricos básicos de ponto e reta são abstratos, uma vez que não existem, no mundo real, grandezas sem dimensão, ou com somente uma dimensão. Todos os objetos de que temos experiência são tridimensionais. Como se verá no Capítulo 1, mesmo o conceito de *número*, apesar de ter sido definido a partir de necessidades concretas, pode ser encarado como abstrato. Sendo assim, parece que estamos diante de um paradoxo: como tornar a matemática mais “concreta” sem abdicar da capacidade de abstração que o seu aprendizado proporciona? Tal pergunta nos parece malfeita.

Possivelmente, quando as pessoas pedem que a matemática se torne mais “concreta”, elas podem não querer dizer, somente, que desejam ver esse conhecimento aplicado às necessidades práticas, mas também que almejam compreender seus conceitos em relação a algo que lhes dê sentido. E a matemática pode ser ensinada desse modo, mais “concreto”, desde que seus conceitos sejam tratados a partir de um contexto. Isso não significa necessariamente partir de um problema cotidiano, e sim saber com o que esses conceitos se relacionam, ou seja, como podem ser inseridos em uma rede de relações.

A matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas. O papel da história da matemática pode ser justamente exibir esses problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram. Para além da reprodução estéril de anedotas visando “motivar” o interesse dos estudantes, é possível reinventar o ambiente “problemático” no qual os conceitos foram criados. A noção de “problema” usada aqui, bem como de “problemático”, não remete a um sentido negativo, ligado a uma falta de conhecimento que deve ser suplantada pelo saber. Tal vocábulo não tem o mesmo sentido dos tradicionais “problemas” que passamos aos alunos após a exposição de uma teoria (como no exemplo dado anteriormente acerca do teorema de Pitágoras) e que equivalem a exercícios de fixação.

Os problemas que motivaram os matemáticos podem ter sido de natureza cotidiana (contar, fazer contas); relativos à descrição dos fenômenos naturais (por que um corpo cai?; por que as estrelas se movem?); filosóficos (o que é conhecer?; como a matemática ajuda a alcançar o conhecimento verdadeiro?); ou, ainda, matemáticos (como legitimar certa técnica ou certo conceito?). No desenvolvimento da matemática, encontramos motivações que misturam todos esses tipos de problemas. Até o século XIX, situações físicas e/ou de engenharia, bem como questões filosóficas, possuíam um papel muito mais importante no desenvolvimento da matemática do que hoje. Já entre os séculos XIX e XX, discussões relativas à formalização e à sistematização da matemática tornaram-se preponderantes.

Entender os problemas que alimentam a matemática de hoje é praticamente impossível, tendo em vista a sua complexidade e a especificidade da linguagem e do simbolismo por meio do qual se exprimem. Mas os conteúdos que ensinamos, desde o ensino fundamental até o superior, já foram desenvolvidos há muitos séculos. Podemos, então, analisar o momento no qual os conceitos foram criados e como os resultados, que hoje consideramos clássicos, foram demonstrados, contrabalançando a concepção tradicional que se tem da matemática como um saber operacional, técnico ou abstrato. A história da matemática pode perfeitamente tirar do esconderijo os problemas que constituem o campo de experiência do matemático, ou seja, o lado concreto do seu fazer, a fim de que possamos entender melhor o sentido de seus conceitos.

RELATO TRADICIONAL

A MATEMÁTICA ANTIGA , em particular a mesopotâmica e a egípcia, sempre foi tratada como parte da tradição ocidental, como se tivesse evoluído de modo linear desde quatro mil anos antes da Era Comum até a matemática grega do século III a.E.C. Ou seja, haveria somente uma matemática e, consequentemente, uma única história de sua evolução até os nossos dias. Essa evolução teria sido marcada pela transformação de uma matemática concreta em uma outra, mais abstrata, da qual seríamos herdeiros.

Esse ponto de vista foi expresso em narrativas dos mais variados tipos, muitas influenciadas pela citação de Heródoto (século V a.E.C.), que creditou aos egípcios a invenção da geometria. Suas construções sofisticadas, como pirâmides e templos, favoreceram a imagem do Egito como o ancestral da cultura moderna. Assim, durante a maior parte do século XX, a Mesopotâmia e o Egito foram vistos como o berço da matemática, com lugar garantido nos primeiros capítulos dos livros gerais sobre a história desse saber. Esses capítulos tentavam enumerar raízes esparsas de conceitos pertencentes ao domínio da matemática, como o tratamento de equações, na álgebra, e o conhecimento do número π para o cálculo de áreas, na geometria.

Em trabalhos renomados, como os de O. Neugebauer, nos anos 1930 e 40, e de B.L. van der Waerden, nas décadas de 1950 a 1980, chegou-se a postular que as receitas aritméticas usadas pelos mesopotâmicos eram uma álgebra e podiam ser facilmente traduzidas por equações. Tal interpretação se baseia em uma tradução anacrônica de seus procedimentos, anacronismo que também se verifica em relação aos egípcios. A exaltação dessas técnicas "avançadas" contrasta com a depreciação de outras partes da matemática desses povos antigos, como a representação egípcia de frações. Seguindo esses mesmos historiadores, a aritmética baseada em frações unitárias (com numerador 1) teria tido uma influência negativa no desenvolvimento da matemática dos egípcios, impedindo-os de evoluir em direção a resultados mais avançados, o que também teria ocorrido com a astronomia dos mesopotâmicos.

[a] Essa separação corresponde a uma divisão social do trabalho que tem por função desqualificar o saber prático em prol do saber teórico. Os filósofos G. Deleuze e F. Guattari mostram, em *Mil platôs*, que a constituição de uma ciência de Estado que se contrapõe às ciências nômades estabelece uma dicotomia entre teoria e prática como forma de distinguir socialmente seus praticantes.

[b] Atualmente, tem-se usado "antes da Era Comum" no lugar de "antes de Cristo" com o fim de neutralizar conotações religiosas.

1. Matemáticas na Mesopotâmia e no antigo Egito

EM UMA HISTÓRIA DOS NÚMEROS, é difícil escolher um ponto de partida. Por onde começar? Em que época? Em que local? Em que civilização específica? Não é difícil imaginar que as sociedades muito antigas tenham tido noção de quantidade. Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência, e o exemplo mais frequente é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, em vez de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas escritas na argila, e essas marcas estariam na origem dos números. Usamos aqui o futuro do pretérito – “teria”, “estariam” – para indicar que essa versão não é comprovada. As fontes para o estudo das civilizações antigas são escassas e fragmentadas. Historiadores e antropólogos discutem, há tempos, como construir um conhecimento sobre essas culturas com base nas evidências disponíveis.

Obviamente, seria muito difícil estudar culturas cuja prática numérica fosse somente oral. Como nosso objetivo é relacionar a história dos números com a história de seus registros, é preciso abordar o nascimento da escrita, que data aproximadamente do quarto milênio antes da Era Comum. Os primeiros registros que podem ser concebidos como um tipo de escrita são provenientes da Baixa Mesopotâmia, onde atualmente se situa o Iraque. O surgimento da escrita e o da matemática nessa região estão intimamente relacionados. As primeiras formas de escrita decorreram da necessidade de se registrar quantidades, não apenas de rebanhos, mas também de insumos relacionados à sobrevivência e, sobretudo, à organização da sociedade.

Nessa época, houve um crescimento populacional considerável, particularmente no sul do Iraque, o que levou ao desenvolvimento de cidades e ao aperfeiçoamento das técnicas de administração da vida comum. O aparecimento de registros de quantidades no final desse milênio associados às primeiras formas de escrita é uma consequência dessa nova conjuntura.

A palavra “Mesopotâmia”, que em grego quer dizer “entre rios”, designa mais uma extensão geográfica do que um povo ou uma unidade política. Entre os rios Tigre e Eufrates, destacavam-se várias cidades que se constituíam em pequenos centros de poder, mas também passavam por ali povos nômades, que, devido à proximidade dos rios, acabavam por se estabelecer. Dentre os que habitaram a Mesopotâmia estão os sumérios e os acadianos, hegemônicos até o segundo milênio antes da Era Comum. As primeiras evidências de escrita são do período sumério, por volta do quarto milênio a.E.C. Em seguida, a região foi dominada por um império cujo centro administrativo era a cidade da Babilônia, habitada pelos semitas, que criaram o Primeiro Império Babilônico. Os semitas são conhecidos como “antigos babilônios”, e não se confundem com os fundadores do Segundo Império Babilônico, denominados “neobabilônios”. Data do período babilônico antigo (2000-1600 a.E.C.) a maioria dos tabletes de argila mencionados na história da matemática.

Outro momento importante é o Selêucida, nome do império que se estabeleceu na Babilônia por volta de 312 a.E.C., depois da morte de Alexandre, o Grande, que incluía grande parte da região oriental. Alguns traços das práticas matemáticas desde o terceiro milênio até o período selêucida guardam muitas semelhanças entre si. Assim, quando mencionarmos os tabletes e a matemática do período babilônico antigo, estaremos nos referindo aos "tabletes babilônicos" e à "matemática babilônica", e quando quisermos enfatizar uma certa estabilidade das práticas matemáticas na região da Mesopotâmia, usaremos o adjetivo "mesopotâmico".

Os tabletes que nos permitem conhecer a matemática mesopotâmica encontram-se em museus e universidades de todo o mundo. Eles são designados por seu número de catálogo em uma determinada coleção. Por exemplo, o tablete YBC 7289 diz respeito ao tablete catalogado sob o número 7289 da coleção da Universidade Yale (Yale Babilonian Collection). Outras coleções são: AO (Antiquités Orientales, do Museu do Louvre); BM (British Museum); NBC (Nies Babylonian Collection); Plimpton (George A. Plimpton Collection, Universidade Columbia); VAT (Vorderasiatische Abteilung, Tontafeln, Staatliche Museen, Berlim).[1]

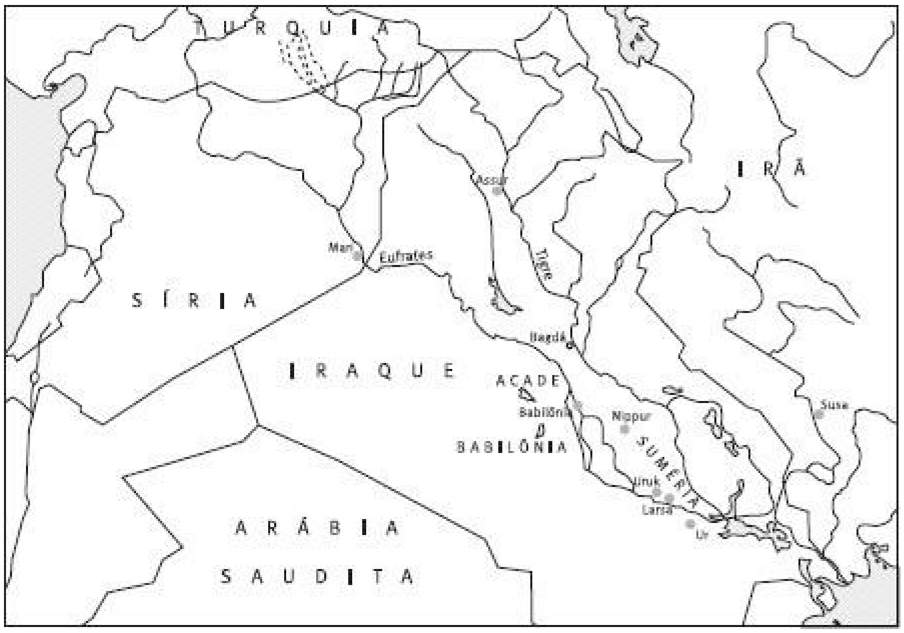


FIGURA 1 Mapa da Mesopotâmia.

Nossa análise se restringirá às duas civilizações antigas mais conhecidas que possuíam registros escritos: a da Mesopotâmia e a do antigo Egito. Por volta do final do quarto milênio a.E.C., os egípcios registravam nomes de pessoas, de lugares, de bens materiais e de quantidades. Provavelmente, nesse momento, havia algum contato entre as duas culturas, o que não quer dizer que o surgimento da escrita e do sistema de numeração egípcio, já usado então, não tenha sido um fato original. Os registros disponíveis são mais numerosos para a matemática mesopotâmica do que para a egípcia, provavelmente devido à maior facilidade na preservação da argila usada pelos mesopotâmicos do que do papiro, usado pelos egípcios.

As fontes indicam que quando a matemática começou a ser praticada no antigo Egito, ela estava associada sobretudo a necessidades administrativas. A quantificação e o registro de bens levaram ao desenvolvimento de sistemas de medida, empregados e aperfeiçoados pelos escribas, ou seja, pelos responsáveis pela administração do Egito. Esses profissionais eram importantes para assegurar a coleta e a distribuição dos insumos, mas também para garantir a formação de novos escribas. Os papiros matemáticos se inserem nessa tradição pedagógica e contêm problemas e soluções preparados por eles para antecipar as situações que os mais jovens poderiam encontrar no futuro.

A escrita, no período faraônico, tinha dois formatos: hieroglífico e hierático. O primeiro era mais utilizado nas inscrições monumentais em pedra; o segundo era uma forma cursiva de escrita, empregada nos papiros e vasos relacionados a funções do dia a dia, como documentos administrativos, cartas e literatura. Os textos matemáticos eram escritos em hierático e datam da primeira metade do segundo milênio antes da Era Comum, apesar de haver registros numéricos anteriores.

Temos notícia da matemática egípcia por meio de um número limitado de papiros, entre eles o de Rhind, escrito em hierático e datado de cerca de 1650 a.E.C., embora no texto seja dito que seu conteúdo foi copiado de um manuscrito mais antigo ainda. O nome do papiro homenageia o escocês Alexander Henry Rhind, que o comprou, por volta de 1850, em Luxor, no Egito. Esse documento também é designado papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o copiou, e encontra-se no British Museum.

Os tabletes e papiros indicam que o modo como os cálculos eram realizados em cada cultura dependia intimamente da natureza dos sistemas de numeração utilizados. Por isso, cálculos considerados difíceis em um sistema podem ser considerados mais fáceis em outro. Isso mostra que as noções de "fácil" e de "difícil" não são absolutas e dependem das técnicas empregadas. Logo, a referência às necessidades práticas de cada um desses povos não basta para explicar a criação de diferentes sistemas de numeração, com regras próprias. É preciso relativizar, portanto, a interpretação frequente de que a matemática nessa época se constituía somente de procedimentos de cálculos voltados para a resolução de problemas cotidianos.

O desenvolvimento do conceito de número, apesar de ter sido impulsionado por necessidades concretas, implica um tipo de abstração. Quando dizemos "abstrato" é necessário tornar preciso o significado desse termo, pois a dicotomia entre concreto e abstrato, evocada frequentemente em relação à ideia de número, dificulta a compreensão do que está em jogo. Contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato. A matemática antiga não era puramente empírica nem envolvia somente problemas práticos. Ela evoluiu pelo aprimoramento de suas técnicas, que permitem ou não que certos problemas sejam expressos. Afinal, uma sociedade só se põe as questões que ela tem meios para resolver, ou ao menos enunciar. As técnicas, no entanto, estão intimamente relacionadas ao desenvolvimento da matemática e não podem ser consideradas nem concretas nem abstratas.

Pode-se falar de "matemática" babilônica ou egípcia tendo em mente que se trata de uma prática muito distinta daquela atualmente designada por esse nome. Houve um período no qual tal atividade envolvia sobretudo o registro de quantidades e operações. Em seguida, ao mesmo tempo em que uma parcela da sociedade começou a se dedicar especificamente à matemática, as práticas que podem ser designadas por esse nome teriam passado a incluir também procedimentos para resolução de problemas numéricos, tratados como "algébricos" pela historiografia tradicional. Essa versão começou a ser desconstruída pelo historiador da matemática J. Høyrup, nos anos 1990, com base em novas traduções dos termos que aparecem nos registros. Ele mostrou que a "álgebra" dos babilônicos estava intimamente relacionada a um procedimento geométrico de "cortar e colar". Logo, tal prática não poderia ser descrita como álgebra, sendo mais adequado falar de "cálculos com grandezas". Tanto os mesopotâmicos quanto os egípcios realizavam uma espécie de cálculo de grandezas, ou seja, efetuavam procedimentos de cálculo sobre coisas que podem ser medidas (grandezas). E essa é uma das principais características de sua matemática.

Escrita e números

A invenção da escrita não seguiu um percurso linear. Além disso, diferentemente do que se costuma acreditar, não foi criada para aprimorar ou substituir a comunicação oral nem para representar a linguagem em um meio durável. Essa crença pressupõe, de certa forma, que a escrita tenha emergido como uma decisão racional de um grupo de indivíduos iluminados que teriam entrado em acordo, de forma consciente, sobre como produzir registros inteligíveis para seus contemporâneos e sucessores. Contudo, assim como outras invenções humanas, a escrita não surgiu do nada.

As primeiras formas de que temos registro são oriundas da Mesopotâmia e datam do final do quarto milênio a.E.C. A versão histórica tradicional, desde o Iluminismo, era a de que sua prática se iniciou com o registro de figuras que buscavam representar objetos do cotidiano, ou seja, sua origem estaria em uma fase pictográfica, e a escrita cuneiforme mesopotâmica teria sido desenvolvida a partir daí. Contudo, em alguns tabletes mesopotâmicos já eram notadas discrepâncias entre as representações e os objetos simbolizados, mas elas eram atribuídas às limitações da cultura primitiva. A história praticada até os anos 1980 não usava tais discrepâncias como evidência para questionar a tese hegemônica sobre a evolução da escrita. Quando os estudiosos se viam diante da impossibilidade de distinguir, na imagem desenhada, o que estava sendo representado, essa dificuldade era atribuída a falhas humanas: cada indivíduo teria feito as imagens de seu jeito, incorrendo em erros.

Por volta dos anos 1930, descobriram-se novos tabletes, provenientes da região de Uruk, no Iraque, com datas próximas ao ano 3000 a.E.C. Centenas de tabletes arcaicos indicavam que a escrita já existia no quarto milênio, pois continham sinais traçados ou impressos com um determinado tipo de estilete. O material contradizia a tese pictográfica, pois nessa fase inicial da escrita as figuras que representavam algum objeto concreto eram exceção. Diversos tabletes traziam sinais comuns que eram abstratos, isto é, não procuravam representar um objeto. Assim, o sinal para designar uma ovelha não era o desenho de uma ovelha, mas um círculo com uma cruz.

A continuação das escavações revelou tabletes ainda mais enigmáticos, mostrando que essa forma arcaica de escrita consistia de figuras como cunhas, círculos, ovais e triângulos impressos em argila. Além disso, os pesquisadores constataram que os primeiros tabletes de Uruk surgiram bem depois da formação das cidades-Estado, e que funcionavam, de alguma forma, sem a necessidade de registros. Nos anos 1990, a pesquisadora Denise Schmandt-Besserat, especialista em arte e arqueologia do antigo Oriente Próximo, propôs a tese inovadora de que a forma mais antiga de escrita teria origem em um dispositivo de contagem. Ela observou que as escavações traziam à tona, de modo regular, pequenos *tokens* – objetos de argila que apresentavam diversos formatos: cones, esferas, discos, cilindros etc. (Figura 2). Esses objetos serviam às necessidades da economia, pois permitiam manter o controle sobre produtos da agricultura, e foram expandidos, na fase urbana, para controlar também os bens manufaturados.

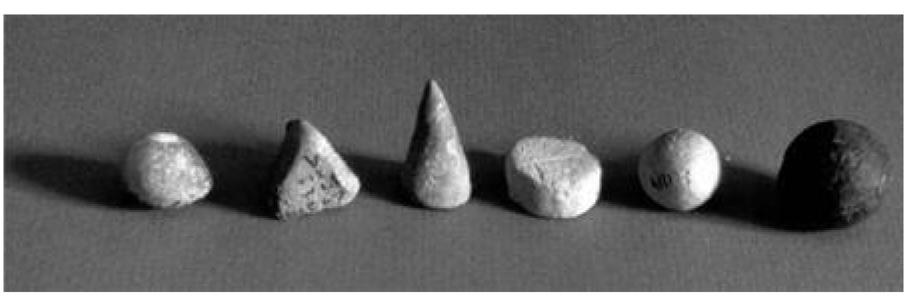


FIGURA 2 Cones, esferas e discos representando medidas.

Com o desenvolvimento da sociedade, aperfeiçoaram-se métodos para armazenar esses *tokens*. Um deles empregava invólucros de argila, como uma bola vazada, dentro dos quais eles eram guardados e fechados. Os invólucros escondiam os *tokens* e, por isso, em sua superfície, eram impressas as formas contidas em seu interior (Figura 3). O número de unidades de um produto era expresso pelo número correspondente de marcas na superfície. Uma bola contendo sete ovoides, por exemplo, possuía sete marcas ovais na superfície, às vezes produzidas por meio da pressão dos próprios *tokens* contra a argila ainda molhada.

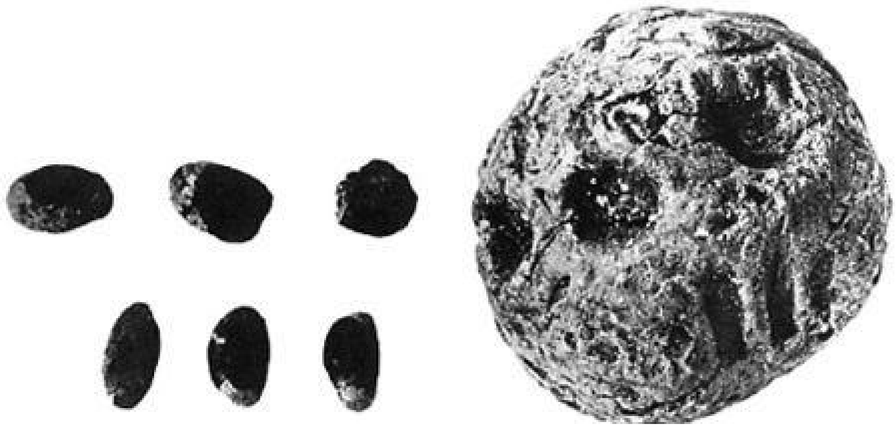


FIGURA 3 Os *tokens* começam a ser inseridos nos invólucros e marcados na superfície.

A substituição de *tokens* por sinais foi o primeiro passo para a escrita. Os contadores do quarto milênio a.E.C. devem ter percebido que o conteúdo dos invólucros se tornava desnecessário em vista das marcas superficiais, e essas marcas passaram a incluir sinais traçados com estilete. Ambos os tipos de sinais eram derivados dos *tokens* e não consistiam de figuras representando os produtos em si, mas os *tokens* usados para contá-los.

Trata-se de uma maneira de contar bem diferente da nossa. Eles não representavam números, como 1 ou 10, mas eram instrumentos particulares que serviam para contar cada tipo de insumo: jarras de óleo eram contadas com ovoides; pequenas quantidades de grãos, com esferas. Os *tokens* eram usados em correspondência um a um com o que contavam: uma jarra de óleo era representada por um ovoide; duas jarras, por dois ovoides; e assim por diante.

Schmandt-Besserat afirma que esse procedimento traduz um modo de contar concreto, anterior à invenção dos números abstratos. Isso quer dizer que o fato de associarmos um mesmo símbolo, no caso 1, ou um cone, a objetos de tipos distintos, como ovelhas e jarras de óleo, consiste em uma abstração que não estava presente no processo de contagem descrito anteriormente. A pesquisadora acrescenta que, aos poucos, formas de arte, como a fabricação de potes e pinturas, também se transformaram para incluir narrativas, constituindo um terreno fértil para a emancipação da escrita em relação à contagem. A associação da escrita com a arte permitiu que ela caminhasse de um dispositivo de administração para um meio de comunicação. A evolução dessa prática, no entanto, não será investigada aqui porque nosso interesse é mostrar como esse sistema deu origem à representação cuneiforme dos números.

Já vimos que as marcas impressas nos invólucros passaram a incluir impressões com estiletes que, aos poucos, foram sendo transpostas para tabletes. Uma vez que o registro na superfície tornava desnecessária a manipulação dos *tokens*, os invólucros não precisavam ser usados enquanto tais e as impressões passaram a ser feitas sobre tabletes planos de argila (Figura 4).

Os primeiros numerais não eram símbolos criados para representar números abstratos, mas sinais impressos indicando medidas de grãos. Em um segundo momento, as marcas representando as quantidades passaram a ser acompanhadas de ideogramas que se referiam aos objetos que estavam sendo contados. Esse foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de naturezas distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado. Na verdade, há registros de que essas sociedades possuíam uma vida econômica ativa e a variedade de objetos com os quais tinham de lidar podia ser muito grande. Nesse caso, o modo de representação que emprega símbolos distintos para quantidades (iguais) de objetos distintos pode se tornar muito restritivo.

FIGURA 4 Impressões em tabletes de argila planos, contendo, neste caso, a descrição da quantidade de ovelhas.

A descoberta dos tabletes de Uruk levou ao desenvolvimento de um projeto dedicado à sua interpretação, que começou por volta dos anos 1960, em Berlim. A iniciativa foi fundamental para a compreensão dos símbolos encontrados e deu origem à obra que esclareceu o contexto desses registros: *Archaic Bookkeeping: Early Writing and Techniques of Economic Administration in the Ancient Near East* (Contabilidade arcaica: escrita antiga e técnicas de administração econômica no antigo Oriente Próximo), de H.J. Nissen, P. Damerow e R.K. Englund. Ficou claro, a partir daí, que os registros serviam para documentar atividades administrativas e exibiam um sistema complexo para controlar as riquezas, apresentando balanços de produtos e contas.

Os tabletes mostram que eram utilizados diferentes sistemas de medidas e bases, em função do assunto tratado nos balanços. Havia, por exemplo, mais de seis sistemas de capacidade usados para diferentes tipos de grãos e de líquidos[2] (as Figuras 5a e 5b fornecem dois exemplos). Ao passo que os objetos discretos eram contados em base 60, a contagem de outros produtos empregava a base 120. Além disso, havia métodos distintos para contar tempo e áreas.

Marcas em forma de cunha e figuras circulares eram unidades que serviam especificamente para contar grãos. Uma cunha pequena representava uma unidade de grãos, a unidade básica do sistema de medidas dos sumérios. Uma quantidade seis vezes maior era representada pela marca circular, e outra dez vezes maior que esta última, por um círculo maior (Figura 5a). Esses sinais podem ter se originado dos *tokens* em forma de cones e esferas, pois o cone pequeno representava, provavelmente, uma unidade de grãos, e a esfera, uma segunda medida básica, de tamanho maior.

Os sistemas de numeração dependiam do contexto, logo, era possível usar sinais visualmente idênticos em relações numéricas diferentes. Uma marca circular pequena podia representar 10 marcas cônicas pequenas no sistema sexagesimal discreto, ou apenas 6 no sistema de capacidade de cevada (diferença exibida nas Figuras 5a e 5b).

FIGURA 5a Sistema usado para medir capacidade de grãos, em particular cevada.

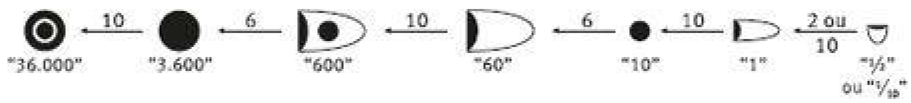


FIGURA 5b Sistema usado para contar a maior parte dos objetos discretos: homens, animais, coisas feitas de pedra etc.

Os símbolos não eram números absolutos, no sentido abstrato, mas significavam diferentes relações numéricas dependentes do que estava sendo contado. O tipo de registro que vemos na Figura 5 é chamado "protocuneiforme", pois antecedeu a escrita cuneiforme, "em forma de cunha", que se desenvolveu ao longo do terceiro milênio. Presume-se que o sistema de contagem que agrupava animais, ou outros objetos discretos, em grupos de 10, 60, 600, 3.600 ou 36.000 foi o primeiro a ser traduzido para a representação cuneiforme.

Os estudos sobre a matemática mesopotâmica sugerem que essa mudança se deu gradualmente. O estágio inicial, ainda protocuneiforme, contava com os seguintes sinais:

Valor	1	10	60	600	3.600	36.000
Sinal						

Sinais com os mesmos valores apareceram em meados do terceiro milênio, já dentro do sistema cuneiforme, mas guardando alguma relação visual com os sinais iniciais:

Valor	1	10	60	600	3.600	36.000
Sinal						

Finalmente, o sistema teria se estabilizado no fim do terceiro milênio. Nesse momento, duas mudanças importantes ocorreram. Em primeiro lugar, a função de contagem de objetos discretos que os sinais tinham no sistema protocuneiforme foi transformada e eles passaram a ser usados para fazer cálculos. A segunda mudança é que um mesmo sinal passou a ser usado para representar valores diferentes.

Valor	1	10	60	600	3.600	36.000
Sinal						

Apesar de as evidências não permitirem um conhecimento linear dos registros numéricos, pode-se conjecturar que o sistema evoluiu de um estágio no qual um único contador era impresso várias vezes até uma fase mais econômica, em que era possível diminuir a quantidade de impressões dos contadores de tamanhos e formas diferentes. Esta é a essência do sistema posicional: um mesmo símbolo serve para representar diferentes números, dependendo da posição que ocupa na escrita. Esse é o caso do símbolo em forma de cunha, que serve para 1, 60 e 3.600. O mesmo acontece em nosso sistema com o símbolo 1, que pode representar também os números 10 e 100.

O sistema sexagesimal posicional usado no período babilônico, deve ter surgido da padronização desse sistema numérico, antes do final do terceiro milênio a.E.C. Ainda que a representação numérica continuasse a ser dependente do contexto e a usar diferentes bases ao mesmo tempo, aos poucos começaram a ser registradas listas que resumiam as relações entre diferentes sistemas de medida. Nesses procedimentos de conversão, realizados em um âmbito administrativo e não matemático, foi introduzido o sistema sexagesimal posicional.

Conforme a metrologia foi sendo racionalizada pelo poder administrativo, também foram se multiplicando as funções da representação dos números, que passaram a incluir objetivos pedagógicos. Há evidências de que, mais ou menos em meados do terceiro milênio a.E.C., as propriedades dos números começaram a ser investigadas por si mesmas, transformação que pode ser associada ao início de uma matemática mais abstrata, ou seja, praticada sem relação direta com uma finalidade de contagem.

Nesse contexto surgiram os escribas, que tinham funções ligadas à administração e eram responsáveis pelos registros. O domínio da escrita não era universal, ou seja, nem todos manejavam suas técnicas, e aos poucos essa elite intelectual foi adquirindo outras atribuições ligadas ao ensino. Na verdade, presume-se que muitos dos tabletes que nos fornecem um conhecimento sobre a matemática babilônica tinham funções pedagógicas. Tem sido considerada com muita frequência na historiografia a função dos tabletes matemáticos, pois esses textos, em sua maioria, eram escolares e nos dão informações valiosas sobre as práticas educacionais mesopotâmicas.[3]

Obter conclusões sobre a finalidade dos registros numéricos envolve inúmeros desafios, uma vez que o seu contexto deve ser reconstruído com base em diversos tipos de informação. As funções pedagógicas dos textos matemáticos podem ser inferidas a partir de seu conteúdo, mas também de suas características materiais. No artigo "Textos matemáticos cuneiformes e a questão da materialidade", C.H.B. Gonçalves observa que, cada vez mais, o estudo das características materiais e arqueológicas de tabletes cuneiformes (formato, disposição do texto, lócus no sítio arqueológico) fornece indicações sobre o ambiente em que foram criados e sua finalidade. Tradicionalmente, as investigações em história da matemática tendiam a ignorar essas informações, mas elas são imprescindíveis no caso da matemática mesopotâmica e egípcia, cujos registros estão somente em tabletes de argila e papiros. A própria tradução dos textos matemáticos cuneiformes envolve diversas mediações que incluem os traços materiais desses textos.[4]

Para afirmar que certos tabletes matemáticos foram produzidos em locais de ensino da tradição de escribas da Mesopotâmia é preciso reunir um conjunto de informações de tipos muito distintos, inseridos em uma rede de argumentos dependentes das mediações que nos permitem enunciá-los. Sendo assim, muitas das afirmações que faremos nas próximas páginas não podem ser averiguadas diretamente, pois dependem de múltiplas camadas de interpretações e reconstruções.

Crítica a dois livros

G. Ifrah, *Os números: A história de uma grande invenção*. Rio de Janeiro, Globo, 1995.

G. Ifrah, *História universal dos algarismos, vol.1: A inteligência dos homens contada pelo número e pelo cálculo*. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1997.

As duas obras citadas acima, publicadas originalmente em francês, tornaram-se referências constantes na história dos números nos últimos anos, e não apenas no Brasil. Talvez porque, como os títulos indicam, sobretudo no segundo caso, pretendam apresentar uma história "universal" dos números e dos cálculos numéricos. Em 1995, logo após terem sido vertidas para o inglês, tornando-se populares, foram bastante criticadas por um grupo de historiadores dedicados à matemática da Mesopotâmia, China, Índia e Meso-América devido ao fato de Ifrah relacionar a emergência do sistema de numeração decimal posicional a tais civilizações.[1] Esses pesquisadores apontam a leviandade das afirmações que procuram dar a impressão de que o conhecimento sobre a história dos números permite uma narrativa unificadora e universal, o que contradiz a fragmentação do material disponível sobre o período.

Tais críticas foram renovadas em uma resenha escrita pelo historiador J. Dauben[2] que mostra que a pretensão do autor não corresponde aos resultados apresentados, os quais multiplicam as falsas impressões sobre a evolução dos números. Uma das inconsistências concerne justamente às origens da base 60, usada pelos mesopotâmicos. Ifrah conjectura que ela teria decorrido de uma combinação entre um sistema sumério de base 5 e um outro, criado por outro povo, de base 12. A união de ambos os sistemas teria dado origem à base 60 porque esse número é o mínimo múltiplo comum de 5 e 12. No entanto, essa afirmação não possui base histórica, já que no início do terceiro milênio a.E.C. não havia apenas um sistema numérico (o que Ifrah observa apenas de relance), mas vários. Eles foram convergindo no decorrer do milênio, conforme a centralização administrativa foi exigindo uma maior racionalização e uma simplificação na representação dos números.

1. Os artigos desses estudiosos estão disponíveis na revista francesa *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Publique*, 398, 1995.
2. J. Dauben, "Book Review: *The Universal History of Numbers* and *The Universal History of Computing*", *Notices of the American Mathematical Society*, 49 (1), 2002, p.32-8.

O sistema sexagesimal posicional

A maioria dos tabletes cuneiformes de que temos notícia são do período em torno do ano 1700 a.E.C., quando a matemática já parecia bastante desenvolvida. O sistema sexagesimal era usado de modo sistemático em textos matemáticos ou astronômicos, mas, ao se referirem a medidas de volume ou de áreas, mesclavam vários sistemas distintos.

O sinal usado para designar a unidade era 𒐕. Esse sinal era repetido para formar os números maiores que 1, como 𒐖 (2), 𒐗 (3), e assim por diante, até chegar a 10, representado por um sinal diferente: 𒌋. Em seguida, continuava-se a acrescentar 𒐕 a 𒌋, até chegar a 20, representado então por 𒎙. Esse processo aditivo prosseguia apenas até o número 60, quando se voltava a empregar o sinal 𒐕, o mesmo usado para o número 1. Mostramos, a seguir, como os sinais cuneiformes representavam os números:

𒐕	1	𒐖	2	𒐗	3	𒐘	4	𒐙	5
𒐚	6	𒑂	7	𒑄	8	𒑆	9	𒌋	10
𒌋𒐕	11	𒌋𒐖	12	𒌋𒐗	13	𒌋𒐘	14	𒌋𒐙	15
𒌋𒐚	16	𒌋𒑂	17	𒌋𒑄	18	𒌋𒑆	19	𒎙	20
𒎙𒐕	21	𒎙𒐖	22	𒎙𒐗	23	𒎙𒐘	24	𒎙𒐙	25
𒎙𒐚	26	𒎙𒑂	27	𒎙𒑄	28	𒎙𒑆	29	𒌍	30
𒌍𒐕	31	𒌍𒐖	32	𒌍𒐗	33	𒌍𒐘	34	𒌍𒐙	35
𒌍𒐚	36	𒌍𒑂	37	𒌍𒑄	38	𒌍𒑆	39	𒐏	40
𒐏𒐕	41	𒐏𒐖	42	𒐏𒐗	43	𒐏𒐘	44	𒐏𒐙	45
𒐏𒐚	46	𒐏𒑂	47	𒐏𒑄	48	𒐏𒑆	49	𒐐	50
𒐐𒐕	51	𒐐𒐖	52	𒐐𒐗	53	𒐐𒐘	54	𒐐𒐙	55
𒐐𒐚	56	𒐐𒑂	57	𒐐𒑄	58	𒐐𒑆	59	𒐕	60

Vemos que, nesse sistema, um mesmo sinal pode ser usado para indicar quantidades diferentes, e dessa maneira os antigos babilônios representavam qualquer número usando apenas dois sinais. Como isso é possível? Esse sistema de numeração é posicional – cada algarismo vale não pelo seu valor absoluto, mas pela “posição” que ocupa na escrita de um número, ou seja, pelo seu valor relativo. Podemos constatar que o número 60 era representado pelo mesmo sinal usado para simbolizar o número 1. Sendo assim, pode-se dizer que o sistema dos antigos babilônios usa uma notação posicional de base 60, isto é, um sistema sexagesimal, ao passo que o nosso é decimal. Na verdade, eles usavam uma combinação de base 60 e de base 10, pois os sinais até 59 mudam de 10 em 10. O sistema que usamos para representar as horas, os minutos e os segundos é um sistema sexagesimal. Por exemplo, para chegar ao valor decimal de 1h4min23s, temos de calcular o resultado ($1 \times 3.600 + 4 \times 60 + 23 = 6.023$s).

Nosso sistema de numeração de base 10 também é posicional. Há símbolos diferentes para os números de 1 a 9, e o 10 é representado pelo próprio 1, mas em uma posição diferente. Por isso se diz que nosso sistema é um sistema posicional de numeração de base 10, o que significa que a posição ocupada por cada algarismo em um número altera seu valor de uma potência de 10 para cada casa à esquerda.

Uma diferença entre o nosso sistema e o dos babilônios é que estes empregavam um sistema aditivo para formar combinações distintas de símbolos que representam os números de 1 a 59, enquanto o nosso utiliza símbolos diferentes para os números de 1 a 9 e, em seguida, passa a fazer uso de um sistema posicional. Em nosso sistema de numeração, no número decimal 125 o algarismo 1 representa 100; o 2 representa 20; e o 5 representa 5 mesmo. Assim, pode-se escrever que $125 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.

O raciocínio é válido para um número que, além de uma parte inteira, contenha também uma parte fracionária. Por exemplo, no número 125,38, os algarismos 3 e 8 representam $3 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$. Se considerarmos 125 escrito na base 60, estaremos representando $1 \times 60^2 + 2 \times 60^1 + 5 \times 60^0$, que é igual a 3.725 na base 10. Generalizando, podemos representar um número N qualquer na base 10 escrevendo:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \ldots + a_{-m} 10^{-m} + \ldots.$$

Isso significa que $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_0 10^0$ é a parte inteira e $a_{-1} 10^{-1} + \ldots + a_{-m} 10^{-m} + \ldots$ é a parte fracionária desse número (as reticências finais indicam que ele pode não ter representação finita, como em uma dízima periódica).

Suponhamos agora que, em vez de usar a base 10, queiramos escrever um número em um sistema de numeração posicional cuja base genérica é b. Para representar um número N qualquer nessa base b, escrevemos:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \ldots + a_{-m} b^{-m} + \ldots.$$

Isso significa que $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_0 b^0$ é a parte inteira e temos que $a_{-1} b^{-1} + \ldots + a_{-m} b^{-m} + \ldots$ é a parte fracionária desse número. O número será escrito com a parte inteira separada da parte fracionária por uma vírgula como: $a_n\, a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-m} \ldots.$

Como na base 60 podemos ter, em cada casa, algarismos de 1 a 59, empregaremos o símbolo “;” como separador de algarismos dentro da parte inteira ou dentro da parte fracionária de um número. Para separar a parte inteira da fracionária, utilizaremos a vírgula (“,”).[a] Por exemplo, no número 12;11,6;31 a parte inteira é constituída por dois algarismos (12 e 11); e a parte fracionária por outros dois (6 e 31).

Na notação posicional babilônica podemos observar que o símbolo 𒁹 podia ser lido de diferentes